

El principio de correspondencia

Antonio F. Rañada

Niels Bohr formuló un principio que impone una condición sobre la Teoría Cuántica para que ésta se reduzca a la Clásica en ciertas condiciones. De esta manera nunca habrá una contradicción entre las dos teorías. El principio tiene, junto a un valor formal, un valor heurístico que se manifestó en la antigua teoría cuántica desarrollada por Bohr y fue utilizado por él en sus estudios sobre la emisión de radiación electromagnética. Hoy día es frecuente el uso de principios análogos cuando dos teorías con distinto ámbito de aplicación se pueden aplicar a un campo de fenómenos.

El principio de correspondencia de Niels Bohr, frecuentemente considerado como una de sus grandes contribuciones, se refiere a la relación formal entre las teorías cuántica y clásica y a las situaciones en las que las dos conducen a las mismas predicciones, imponiendo una fuerte condición sobre la primera para que sus resultados no estén nunca en contradicción con los de la segunda, en los casos en que ésta es aplicable.

Aunque Bohr fue el primero que formuló explícitamente tal principio, uno análogo había sido ya utilizado de manera implícita por Einstein, al construir su teoría de la Relatividad Especial, primero, y, más tarde de nuevo, al crear la Relatividad General, siendo hoy día un instrumento de uso frecuente al desarrollar modelos en física fundamental.

Los principios de correspondencia tienen dos aspectos dis-

tintos: uno formal y otro heurístico. El primero se refiere a una relación entre teorías y se aplica a situaciones como la siguiente. Una teoría T describe adecuadamente un dominio de fenómenos D , pero entra en colisión con la experiencia en el dominio E . Se desarrolla una nueva teoría T' que explica los fenómenos de E . Diremos que T' es más fundamental que T y que T es una aproximación a T' , si entre ellas se aplica un principio de correspondencia, es decir, si se puede mostrar que T' se reduce a T en D , es decir, bajo ciertas condiciones o cuando ciertos parámetros tienden a ciertos valores. En ese caso T' explica satisfactoriamente todos los fenómenos de la unión de D y E . Nótese que la teoría antigua puede ser, lo es normalmente, más simple y fácil de aplicar y, por tanto, preferible en su propio ámbito ¹.

Un ejemplo muy esclarecedor es aquel en que T = mecánica newtoniana, T' = mecánica relativista. El dominio D es el de los sistemas clásicos en los que las velocidades son mucho menores que la de la luz c , es decir, tales que $v \ll c$. Aunque la Relatividad incluye en su ámbito de aplicabilidad a los sistemas en movimiento lento en comparación con la luz, resulta en esos casos poco adecuada, pues la teoría newtoniana da los mismos resultados de forma más sencilla. Por ejemplo, la teoría de Einstein es totalmente ineficaz para diseñar el motor de un coche, cosa que se hace con toda normalidad mediante la mecánica clásica. Por ello, aunque la teoría de Einstein es más fundamental y la de Newton es una aproximación, ésta es preferible en su ámbito. Otro ejemplo interesante es el del par Relatividad General - Gravitación Newtoniana, en el que el principio de correspondencia se aplica cuando las velocidades son pequeñas y los campos gravitatorios débiles.

Junto a este aspecto formal, los principios de correspondencia tienen un gran interés heurístico. Cuando se intenta sustituir una teoría ya conocida por otra nueva, bien porque se conoce alguna discrepancia con la experiencia, bien por razones formales, se usa siempre un principio de este tipo. Por ejemplo, al intentar construir, sin éxito, una teoría del campo unificado, que debería englobar a la gravitación y al electromagnetismo, Einstein trabajó siempre con la condición de que la nueva teoría se debería reducir a la Relatividad General y al Electromagnetismo, bajo ciertas condiciones. Un caso más reciente es el de la teoría de las interacciones electrodébiles, desarrollada por A. Salam, S. Weinberg y S. Glashow en los

70'S, en la que tanto las fuerzas electromagnéticas como las débiles aparecen como manifestaciones del mismo fenómeno y debidas al intercambio de partículas. En muchas situaciones, como en el caso de la desintegración del muón, esta teoría se reduce a la más antigua de Fermi, que se considera una aproximación fenomenológica válida en ciertos casos en los que el cuadrado de la transferencia de momento es muy pequeño respecto al de la masa de la partícula intermedia. Un repaso al *Physical Review* de los últimos años mostraría muchos trabajos en los que se aplica un principio de correspondencia de manera más o menos implícita.

Bohr enunció su principio mediante la conocida frase «Para números cuánticos grandes los resultados de la nueva teoría coinciden con los de la mecánica clásica»². Hoy día se suele formular de tres formas distintas.

1. Si la constante de Plank h tiende a cero, los resultados de la teoría cuántica tienden a los de la clásica.

2. Para obtener la ecuación de evolución de una partícula cuántica, es decir, su ecuación de Schrödinger, se procede como sigue: se parte de la función energía clásica, llamada normalmente función de Hamilton, $H(x, p)$, donde x es la coordenada de posición y $p=mv$ es el momento lineal, producto de la masa por la velocidad y se transforma en un operador, sustituyendo en ella p por $(h/2\pi i) \frac{\partial}{\partial x}$, es decir, por la derivación respecto a x , multiplicada por h y dividida por $2\pi \sqrt{-1}$. La ecuación de Schrödinger toma así la forma

$$H\psi = i \frac{h}{2\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad [1]$$

y describe correctamente la partícula cuántica.

3. Existe, entre las dos teorías, una estrecha analogía formal: el álgebra de los conmutadores de los operadores cuánticos es isomorfa a la de los paréntesis de Poisson de las variables clásicas.

La primera formulación es, como veremos más adelante, equivalente a la original de Bohr y muestra el sentido del principio de forma elocuente y expresiva. Ya en 1906 Planck había

probado que, en el límite $h \rightarrow 0$, las predicciones de la teoría cuántica tienden a las de la clásica, pues se obtiene la ley de distribución de Jeans, en vez de la suya nueva.

La constante de Planck es una medida de lo que en física se llama acción, es decir, del producto de energía por tiempo. Como es una constante, decir que tiende a cero equivale a afirmar que las acciones que intervienen en el problema en estudio son mucho mayores que ella. Si la diferencia entre las dos teorías se debe a que existe una cantidad fundamental indivisible de acción, igual a h , esa atomicidad debe ser inapreciable en ese caso, por lo que se deben encontrar los resultados clásicos, de la misma forma que, al escribir este párrafo, puedo prescindir de la estructura corpuscular del papel, porque los átomos son unas mil millones de veces más pequeños que la hoja. En palabras del propio Planck: «La teoría clásica puede caracterizarse por el hecho de que el cuanto de acción se hace infinitamente pequeño». Parece, por tanto, natural exigir la condición 1.

En el segundo enunciado, el principio de correspondencia tiene, fundamentalmente, un valor heurístico, pues da lo que se conoce como regla de cuantización. Gracias a ella, es posible construir una teoría cuántica de todo sistema susceptible de ser estudiado mediante la teoría clásica. Se obtiene así un método muy poderoso de formulación cuántica, aunque con algunas limitaciones. Aparte de algunas de tipo técnico, relacionadas con la no conmutación de los operadores de x y p , otras se deben a que alguna magnitud, como el espín, no tienen análogo clásico. Finalmente hay objetos que, como los quarks y los gluones, no pueden ser tratados clásicamente. Pero conviene aclarar que esta formulación del principio sólo se aplica a la llamada entonces nueva teoría cuántica, desarrollada a partir de 1923, tras la obra de Heisenberg y Schrödinger, que es, esencialmente, la empleada todavía.

La tercera versión fue utilizada por Dirac para desarrollar su Teoría de transformaciones, que permite formular la mecánica cuántica de manera coherente y rigurosa³⁻⁴, tras observar que los productos de Heisenberg tenían propiedades muy parecidas a las de los paréntesis de Poisson. Dirac comprendió que una teoría construida sobre esa analogía tiene necesariamente a la mecánica clásica como límite, si h tiende a cero. Aunque se le suele atribuir un carácter meramente formal, este enunciado del principio de correspondencia tuvo sin duda

un importante valor heurístico, como el caso de Dirac muestra claramente. Las analogías entre lo clásico y lo cuántico resultaron muy notables. Por ejemplo, entre la formulación de Heisenberg de la teoría cuántica y la de Hamilton de la clásica. O entre las de Schrödinger y de Hamilton-Jacobi, respectivamente. Otra muy interesante está dada por el teorema de Ehrenfest que afirma que la ley cuántica del movimiento de una partícula es la misma que la clásica, si se sustituyen la velocidad y la posición por sus valores medios.

Debe señalarse que la analogía entre las dos teorías era algo muy bien recibido por la tradición ortodoxa, que pronto se formó, de las nuevas ideas. Hay, probablemente, dos razones para ello. En primer lugar suele ocurrir que en las primeras formulaciones de una nueva teoría abundan muchos elementos de la antigua que incluso son innecesarias. Probablemente el caso más notable de esta tendencia a razonar e interpretar por analogía con lo anterior es la persistencia de la idea del éter como sustento de las vibraciones luminosas, aunque era ya innecesario desde la teoría electromagnética de la luz de Maxwell. En segundo lugar, para la filosofía operacionalista y positivista de la escuela ortodoxa, llamada de Copenhague, una teoría se refiere a medidas y experimentos y éstos se han con aparatos macroscópicos que obedecen las leyes clásicas. Pero conviene insistir en que, prescindiendo de interpretaciones filosóficas, el resultado obtenido por Dirac mediante el uso de la analogía y la correspondencia fue el magnífico edificio de la mecánica cuántica.

Conviene ahora que examinemos cómo surgió y cuál fue la formulación del principio del propio Niels Bohr y cómo influyó en el desarrollo de la antigua teoría cuántica. En primer lugar debe decirse que concedía gran importancia a su principio de correspondencia del que hizo uso frecuente, de manera cada vez más explícita desde su modelo atómico en 1913⁵ hasta que llegó a formularlo claramente en 1923⁶.

En su famoso trabajo de 1913 Bohr consiguió explicar utilizando sus nuevos postulados, de tres formas distintas, la famosa fórmula de Balmer, que permitía calcular satisfactoriamente la frecuencia de la radiación emitida por el átomo de hidrógeno. En los tres métodos utilizó un principio implícito de correspondencia, al interpretar la emisión «por analogía con la electrodinámica ordinaria». Más concretamente, su guía fue la idea de que, si los números cuánticos de las

órbitas son grandes la expresión clásica de la frecuencia de la radiación emitida aún tiene valor, quizás porque el radio se hace muy grande, con lo que el movimiento del electrón se aproxima a una órbita macroscópica.

En su modelo se supone que, en el hidrógeno, el electrón, de masa m y carga eléctrica e , se mueve en órbitas circulares alrededor del núcleo, de modo que su velocidad v y su radio r cumplen la relación

$$mvr = n \frac{h}{2\pi} \quad [2]$$

donde n es un número entero positivo, que caracteriza el nivel de energía, valiendo ésta

$$E_n = - \frac{2\pi^2 me^4}{h^2} \frac{1}{n^2} \quad [3]$$

Mientras el electrón está en el nivel n -simo no emite energía. Si lo hace, en cambio, cuando efectúa una transición, es decir, cuando salta del nivel i al nivel j , emitiendo un cuanto de radiación (un fotón), cuya frecuencia vale

$$\nu_{ij} = \frac{E_i - E_j}{h} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} \left\{ \frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2} \right\} \quad [4]$$

en acuerdo total con los datos experimentales. Pero, en su primera versión, el modelo de Bohr no decía nada sobre la probabilidad con que se producen esas transiciones o, en otras palabras, sobre la intensidad de la radiación observada con frecuencia ν_{ij} . Tenemos así los dos problemas fundamentales con que se enfrentaba la teoría cuántica. El primero, la determinación de los niveles de energía de un sistema, estaba ya resuelto en el átomo de hidrógeno, fórmula [3], pero no en sistemas más complejos. Del segundo, el cálculo de las probabilidades, y más tarde de las polarizaciones, de transición no se podía decir nada ni siquiera en el hidrógeno.

La solución del primer problema pudo ser alcanzada mediante la aplicación del principio adiabático de Paul Ehrenfest, del que no nos ocupamos aquí, a las condiciones de cuantización de Sommerfeld, de las que la de Bohr [2] es un caso particular. Se puso así hacer un estudio relativista del átomo de hidrógeno, explicándose su estructura fina, y resolver el

problema en el caso de sistemas multiperiódicos ⁷. Pero queda dicho que el de correspondencia jugó ya un papel decisivo en la primera solución en el átomo de hidrógeno.

Para resolver el segundo, antes de la aparición de la nueva teoría cuántica en 1923-27, resultó imprescindible el principio de correspondencia. Ya hemos visto que en el límite $h \rightarrow 0$, la teoría cuántica tiende a la clásica, según había observado Planck, en primer lugar. Pero, como la energía del fotón es el producto $h\nu$ se puede obtener el mismo resultado haciendo que sea la frecuencia la que tiende a cero. De hecho, Einstein había probado en 1909 ⁸, mediante el estudio de fluctuaciones de energía de la radiación que, a pequeñas frecuencias, ésta se comporta como una onda electromagnética clásica. Esta idea, equivalente sin duda a la observación de Planck, fue utilizada por Bohr para establecer su principio de correspondencia. Como vemos a partir de [4], pequeñas frecuencias corresponden a valores grandes de i y j , por lo que Bohr afirmó que «Los resultados de la teoría cuántica deben tender a los de la clásica, para grandes números cuánticos». Parece ser que la comprobación de que, si $i = j + 1$, la frecuencia cuántica [4] coincide con la clásica para j grande causó una gran impresión en él.

En los años 1918-1922 Bohr dedicó grandes esfuerzos a la construcción de una teoría cuántica satisfactoria y, en ese proceso, el principio de correspondencia jugó un papel muy importante, tanto desde el punto de vista heurístico como desde el formal. La razón de ello es clara. Pues Bohr negaba explícitamente la posibilidad de describir lo que ocurre durante el proceso de emisión del fotón, idea ésta que sería aceptada totalmente por la ortodoxia cuántica, en su perspectiva positivista. Pero, si se acepta este punto de vista, ¿cómo desarrollar una teoría que explique la intensidad y la polarización de la radiación emitida? Bohr no encontró otra solución que razonar por analogía con la teoría clásica, utilizando su principio de correspondencia.

En la física clásica, un sistema oscilatorio puede emitir radiación en los llamados modos normales de vibración, que están caracterizados por varios números enteros n, m, p, \dots . La intensidad de la radiación emitida está determinada por el cuadrado del coeficiente vectorial de Fourier $\vec{D}_{nmp\dots}$ correspondiente en el desarrollo del momento dipolar eléctrico. Para

aplicar el principio de correspondencia a esta predicción clásica, Bohr se sirvió del análisis, realizado por Einstein en 1917, del proceso de emisión espontánea e inducida y de absorción inducida de fotones por átomos. Para que la ley de distribución de Planck sea válida, es preciso que entre la probabilidad A_{mn} de que un átomo se desexcite espontáneamente, pasando del nivel m al n , y la de que lo haga como consecuencia del efecto de una radiación de frecuencia $\nu = \nu_{mn}$, B_{mn} , debe existir la relación simple

$$A_{mn} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B_{mn} \quad [5]$$

Bohr asoció a A_{mn} y B_{mn} , llamadas probabilidades de Einstein, los coeficientes de Fourier del momento dipolar eléctrico mediante la correspondencia

$$A_{mn} \leftrightarrow \frac{(2\pi)^4 \nu^3}{3c^3 h} |\vec{D}_{m-n}|^2 \quad [6]$$

Uno de los primeros resultados que obtuvo a partir de [6] fue la explicación de las llamadas reglas de selección, es decir, de que no hay transiciones entre algunos pares de niveles, algo que ya se sabía, pero que se daba como regla empírica sin ninguna base teórica. Poco después, su discípulo H. A. Kramers mostró que, mediante la correspondencia anterior, se predican valores para las intensidades y polarizaciones de las rayas espectrales del hidrógeno en muy buen acuerdo con la experiencia. Así, la teoría cuántica, mediante la aplicación combinada de los principios adiabático y de correspondencia, llegó a ser en 1923 un esquema capaz de predecir muchas de las propiedades de los sistemas atómicos simples.

Pero, en ese momento, se produjo la gran revolución conceptual que llevó a la nueva teoría cuántica, que sigue en vigor hasta el día de hoy, gracias a De Broglie, Schrödinger, Born, Heisenberg y Dirac especialmente, pero con un muy importante papel de Bohr, en cuanto a la interpretación. ¿Cuál es la importancia del principio de correspondencia en esta teoría ya definitiva?

La elaboración de la mecánica cuántica en su forma definitiva permitió abordar problemas que eran demasiado complejos para la antigua teoría, de manera especial el estudio de

los átomos multielectrónicos, de las moléculas y de los núcleos. Pero, además, tras la teoría de Transformaciones de Dirac y su formulación en los espacios de Hilbert por von Neumann, la impresionante capacidad predictiva se vio acompañada por una enorme coherencia formal. Es cierto que personas de tanta significación como De Broglie, Schrödinger o Einstein se oponían a aceptar la interpretación general de las nuevas ideas. Pero no pudieron evitar que éstas pasasen a ser el instrumento normal de la física en el tratamiento del mundo atómico, proceso éste en el que Bohr jugó un papel tan decisivo que empezó pronto a hablarse del espíritu y de la interpretación de Copenhague, para referirse a la doctrina triunfante.

Se comprendió entonces el verdadero sentido del principio de correspondencia: La mecánica clásica no es una teoría fundamental, sino una aproximación fenomenológica a otra más básica que es la teoría cuántica. Pero, puesto que el mundo macroscópico es más fácilmente experimentable y está más cerca de nuestra situación, la teoría clásica, aunque sólo aproximada, sirve de guía. Esta relación se manifiesta de varias formas; por ejemplo, si h tiende a cero.

a) Las fluctuaciones de las variables en torno a su valor medio se anulan. Como el teorema de Ehrenfest, antes mencionado, afirma que los valores medios obedecen leyes clásicas en el movimiento de una partícula, se llega a la 2.ª ley de Newton.

b) La ecuación de onda de Schrödinger se reduce a la de Hamilton-Jacobi de la mecánica clásica.

c) Las limitaciones impuestas por el principio de incertidumbre de Heisenberg pueden despreciarse.

Hacia 1940, R. Feynman explotó maravillosamente esta idea al proponer una formulación alternativa de la mecánica cuántica en la que el principio de Bohr juega un papel realmente singular. Partiendo de la idea de que el concepto de trayectoria definida de una partícula no tiene sentido cuántico, pero es básico y esencial en mecánica clásica, Feynman propuso una nueva definición de la probabilidad de que un electrón se traslade de un punto A a otro B. En ella aparecen todas las trayectorias posibles, sin que ninguna juegue un papel especial, y tiene la propiedad de que, al disminuir h ,

van interviniendo de modo efectivo cada vez menos trayectorias ,dentro de un haz cada vez más estrecho que se reduce a una única curva cuando h se anula exactamente. Esta formulación es equivalente a la anterior, pero tiene la ventaja de que, en la transición cuántica-clásica, se tiene literalmente ante los ojos la aparición de una trayectoria definida. Estas ideas parecieron al principio interesantes e iluminadoras, pues muestran de modo muy patente la relación entre las dos teorías, pero no parecían tener un valor heurístico claro. Sin embargo, al cabo de los años, se comprobó la fecundidad de este planteamiento, que constituye hoy el más adecuado para el tratamiento de modelos no lineales, inabordables de otro modo. Los aspectos formales y heurísticos del principio de Bohr van, ciertamente, de la mano, en este caso.

El principio de correspondencia puede utilizarse también para entender mejor la mecánica clásica, utilizando así el enorme esfuerzo de reflexión colectiva que ha exigido la descripción del mundo atómico. Esto se manifiesta desde el punto de vista pedagógico, pero también desde el heurístico. Pues ha llevado a presentaciones de las ideas clásicas en las que sus bases aparecen más claramente y en las que el salto a las ideas cuánticas resulta más fácil, lo que se puede comprobar en muchos libros de texto. Pero también se han podido resolver algunos puntos oscuros, especialmente en teoría clásica de campos. Pues es posible imponer a una teoría clásica algunas condiciones, para que los resultados obtenidos al aplicar reglas de cuantización estén libres de contradicciones. Sánchez Ron⁹ ha señalado algunos ejemplos interesantes de este «principio de correspondencia inversa».

Para terminar, quiero referirme a una limitación del principio de Bohr, sobre la que Dirac habló frecuentemente en sus últimos años^{4, 10}, en sus críticas al estado y desarrollo de la teoría cuántica dominante. Normalmente, la elaboración de un modelo cuántico comporta dos elementos a los que se puede aplicar la idea de correspondencia. Uno de ellos es la elección de una función lagrangiana o hamiltoniana a las que se aplican reglas de cuantización. El otro lleva a las ecuaciones de evolución de Hamilton y de Heisenberg, respectivamente, mediante técnicas matemáticas análogas. El primer elemento es propio y característico del sistema que se va a estudiar, pero el segundo lo es de la teoría clásica o cuántica. Por ello, puede haber correspondencia de teorías y no de sistemas. El

ejemplo más interesante es, sin duda, la ecuación de Dirac, cuyo hamiltoniano cuántico no se puede obtener mediante la aplicación de reglas de correspondencia al de ninguna partícula que obedezca la mecánica clásica; pues, por ese sistema, lo que se obtiene es la ecuación de Klein-Gordon. Por ello, Dirac tuvo que crearlo *ex novo*, sin ayudarse por ninguna correspondencia. Desde ese momento, la física ha ido estudiando sistemas cada vez más alejados del mundo de nuestra intuición clásica, por lo que el principio de correspondencia puede ser un mal guía. Dirac lo expresaba así: «Es necesario separarse más de las ideas clásicas, manteniéndose fiel a las ecuaciones de Heisenberg»¹¹.

En resumen, el principio de correspondencia de Niels Bohr permitió el desarrollo correcto de la antigua teoría cuántica, impulsó la formulación de la nueva y es elemento esencial para comprender la relación formal entre las mecánicas clásica y cuántica.

Referencias

- ¹ MARIO BUNGE (1973): *Filosofía de la Física*. Ariel, cap. 9.
- ² M. JAMMER (1966): «The conceptual development of quantum mechanics». McGraw-Hill, cap. 3.
- ³ P. A. M. DIRAC (1977): En «History of Physics in the XX century», editado por C. Weiner, Academic Press, New York.
- ⁴ A. F. RAÑADA (1985): *Arbor*, 470, 55.
- ⁵ N. BOHR (1913): *Philosophical Magazine*, 26, 1-25, 476-502, 857-875.
- ⁶ N. BOHR (1923): *Zeitschrift für Physik*, 13, 117 (1923).
- ⁷ Vale la pena mencionar que la limitación a sistemas multiperiodicos es mucho más severa que lo que se suele suponer, pues excluye todos los átomos, excepto el del hidrógeno, ya que su hamiltoniano no es integrable.
- ⁸ A. EINSTEIN (1909): *Physikalische Zeitschrift*, 10, 185.
- ⁹ J. M. SÁNCHEZ RÓN (1983): *Fundamenta Scientiae*, 4, 77.
- ¹⁰ P. A. M. DIRAC (1982): *Int. J. Theor. Phys.*, 21, 603.
- ¹¹ P. A. M. DIRAC (1984): *Eur. J. Phys.*, 5, 65.